École Normale Supérieure
14 novembre 2016

Topologie, analyse et calcul différentiel

Partiel

Durée : 2 heures. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les documents ne sont pas autorisés. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une très bonne note. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1/n)$ et L_∞ le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,0)$. Soit L la réunion des L_n pour $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On munit chaque L_n de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties O de L telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $O \cap L_n$ est un ouvert de L_n.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur L. Comparer $\mathcal{T}$ avec la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

2. $(L, \mathcal{T})$ est-il séparé ? compact ?

3. Montrer que $(L, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable. Indication : on raisonne par l'absurde ; étant donnée une distance d de L engendrant $\mathcal{T}$, construire une suite (x_n) telle que $x_n \in L_n - \{(0,0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n) tend vers $(0,0)$ dans (L,d) mais pas dans $(L,\mathcal{T})$.

Exercice 2

Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout $x, y \in X$ et $\epsilon > 0$, une ϵ-*chaine* joignant x à y est définie comme une suite finie de points $z_1, \ldots, z_n$ de X telle que $z_1 = x$, $z_n = y$ et pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon$. L'espace métrique X est dit *bien enchainé* si pour tout x, y dans X et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une ϵ-chaine joignant x à y.

1. Montrer que si X est connexe, alors X est bien enchainé. Indication : considérer $x \in X$, $\epsilon > 0$ et l'ensemble $E_{x,\epsilon}$ des points $y \in X$ tels qu'il existe une ϵ-chaine joignant x à y.

2. Montrer que si X est bien enchainé et compact, alors X est connexe.

Exercice 3

On étudie quelques espaces topologiques quotients. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'espace topologique X, on munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient et on note $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique.

1. Sur $X = \mathbb{R}$, on considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont les singletons $\{x\}$, pour $x \neq 0, 1$ et la partie $\{0,1\}$. La projection π est-elle ouverte ? Identifier un espace topologique simple homéomophe à $X/\mathcal{R}$ (un dessin non justifié suffira).

2. Sur $X = \mathbb{R}$, on considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ telle que $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2^n y$. Montrer que $\{\pi(0)\}$ est dense dans $X/\mathcal{R}$. Montrer que $X/\mathcal{R} - \{\pi(0)\}$ est séparé.

3. Sur $X = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$, on considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ telle que $(x_1,x_2)\mathcal{R}(y_1,y_2)$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ telle que $(x_1,x_2) = (2^n y_1, 2^{-n} y_2)$. Montrer que pour tout (x,y)

dans X, il existe un ouvert U de X contenant (x, y) telle que $\pi_{|U}$ est un homéomorphisme sur son image. Montrer que le quotient $X/\mathcal{R}$ n'est pas séparé.

Exercice 4
Soit (X, d) un espace métrique complet et soit A une partie de X. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence entre les deux assertions :

(i) Il existe une distance d' sur A qui engendre la même topologie que la restriction de d à A et pour laquelle (A, d') est complet.

(ii) A est une intersection dénombrable d'ouverts de X.

1. **Préliminaires**

a) Montrer qu'un fermé d'un espace métrique est une intersection dénombrable d'ouverts.

b) Montrer que si Y est un espace topologique et $f : Y \to \mathbb{R}$ une application, l'ensemble des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ouverts. Indication : considérer les ensembles

$$E_n := \{x \in Y \mid \exists V \text{ voisinage de } x : \forall y, y' \in V, |f(y) - f(y')| < 1/n\},$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **Preuve de** $(i) \implies (ii)$

a) Montrer qu'on peut supposer d' bornée et A dense dans X.

b) On suppose (i) avec d' bornée et A dense dans X. Pour z dans X, on pose

$$f(z) = \sup \left\{ \limsup_{n\to\infty} d'(x_n, x_{n+1}) / x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \right\}.$$

Montrer que f est bien définie, à valeurs réelles et s'annule exactement en les points de A.

c) Montrer que f est continue en tout point de A. En déduire que A est une intersection dénombrable d'ouverts.

3. **Preuve de** $(ii) \implies (i)$

a) Soit U un ouvert de X et F le complémentaire de U. On considère d', définie sur U, par

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right|,$$

Montrer que d' est une distance sur U, engendrant la même topologie que d. Montrer que (U, d') est un espace métrique complet.

b) Montrer que $(ii) \implies (i)$.